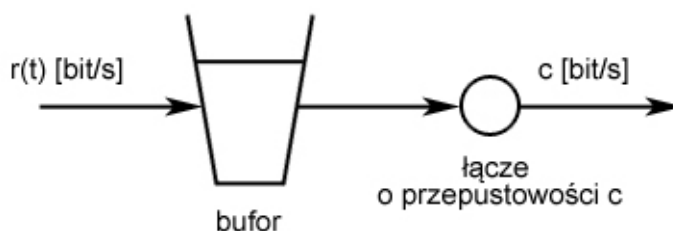


## ZADANIE 1

Założmy, że węzeł systemu telekomunikacyjnego można opisać za pomocą bufora i podłączonego do niego łącza o przepustowości  $c = 0,5$  Mb/s (patrz rys. 1.1). Założmy też, że każdorazowo przed pojawieniem się ruchu telekomunikacyjnego na jego wejściu jego bufor jest pusty. Tak zwany sumaryczny ruch telekomunikacyjny  $R(t)$  na wejściu węzła jest określony za pomocą wzoru:  $R(t) = \int_0^t r(s) ds$ , gdzie funkcja  $r(s)$  oznacza szybkość wejściowego ruchu telekomunikacyjnego w bit/s. Funkcje  $R$  i  $r$  są funkcjami czasu. Oblicz niezbędną wielkość bufora, która zapewnia, że nie będą tracone w węźle przesyłane dane (bity) dla trzech poniższych typów ruchu telekomunikacyjnego:

1. gdy  $r(t)$  jest stałe, czyli  $r(t) = a$  (constans);
2. gdy mamy do czynienia z ruchem telekomunikacyjnym typu „włączony-wyłączony” (ang. on-off), którego prędkość przepływu w fazie „włączony” wynosi 1 Mb/s, a w fazie „wyłączony”, trwającej  $\tau$  sekund, 0 bit/s;
3. gdy  $r(t)$  jest dane wzorem:  $r(t) = c + c \sin \omega t$ , gdzie  $\omega = 2\pi f$  oznacza pulsację kątową, a  $f = 100$  kHz.



Rys. 1.1 Węzeł telekomunikacyjny

## ROZWIĄZANIE:

(Uwaga! Punkt 1. i 2. zadania można rozwiązać na kilka innych sposobów – bardziej intuicyjnych. Jednak co do punktu 3. zaleca się rozwiązać zadanie wg zaproponowanej metody.)

W ogólnym przypadku, w danym buforze w każdej chwili czasu występuje ruch telekomunikacyjny typu:  $r(t)$  bitów na sekundę wpływa do bufora i  $c(t)$  bitów na sekundę wypływa z bufora, przy czym należy założyć, że w tym ogólnym przypadku  $c(t)$  jest zmienną w czasie przepustowością łącza danych podłączonego do wyjścia bufora. Zatem w każdej chwili czasu pozostaje w buforze zmagazynowanych  $b(t) = r(t) - c(t)$  bitów na sekundę. Całkowita liczba bitów zmagazynowanych w buforze po czasie  $t$  jest sumą wszystkich chwilowych wartości  $b(t)$  od czasu 0 do  $t$ , co wygodnie jest zapisać w postaci całkowej:

$$\beta(t) = \beta_0 + \int_0^t b(\tau) d\tau, \quad (1)$$

gdzie  $\beta_0$  jest zawartością bufora przed rozpoczęciem transmisji, a  $\tau$  jest nową zmienną pomocniczą oznaczającą czas. Po odpowiednim podstawieniu wcześniej zdefiniowanych zależności otrzymujemy:

$$\beta(t) = \beta_0 + \int_0^t r(\tau) - c(\tau) d\tau \quad (2)$$

W zadaniu należy znaleźć niezbędną wielkość bufora, która zapewni, że przesyłane bity nie będą tracone w węźle, czyli minimalną fizyczną wartość  $B$  spełniającą nierówność:

$$B \geq \sup_{t \geq 0} \{\beta(t)\} \quad (3)$$

gdzie  $\sup_{t \geq 0} \{\beta(t)\}$  oznacza największą wartość funkcji  $\beta(t)$  w przedziale  $t \geq 0$ .

Przed rozwiązaniem poszczególnych przypadków zadania można powyższą nierówność częściowo rozwiązać i uprościć.

Jak wynika z treści zadania, przed rozpoczęciem transmisji bufor był pusty więc  $\beta_0 = 0$ . Zatem postać nierówności (3) biorąc pod uwagę także równanie (2) będzie:

$$B \geq \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t r(\tau) - c(\tau) d\tau \right\} = \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t r(\tau) d\tau - \int_0^t c(\tau) d\tau \right\} \quad (4)$$

Ponieważ przepustowość łącza wyjściowego jest stała i równa  $c$  więc:

$$\int_0^t c(\tau) d\tau = \int_0^t c d\tau = c \int_0^t d\tau = c(t-0) = ct \quad (5)$$

Po podstawieniu (5) do (4) mamy:

$$B \geq \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t r(\tau) d\tau - ct \right\} \quad (6)$$

co jest rozwiązaniem ogólnym zadania. Mając to rozważmy 3 poszczególne przypadki podane w zadaniu.

1. Dla przypadku gdy  $r(t) = a$  wyrażenie (6) przyjmuje postać:

$$B \geq \sup_{t \geq 0} \left\{ \int_0^t a d\tau - ct \right\} = \sup_{t \geq 0} \{at - ct\} = \sup_{t \geq 0} \{(a-c)t\} = (a-c)t \quad (7)$$

co oznacza, że dla dowolnie długiego rozważanego czasu  $t$ , w sytuacji gdy przepustowość łącza  $c$  będzie mniejsza niż stała wartość  $a$  to zawsze będzie następowało przepełnienie bufora ponieważ wartość wyrażenia  $(a-c)t$  będzie dążyła wraz z czasem do nieskończoności. Gdy przepustowość  $c$  będzie większa bądź równa  $a$  wtedy bufor w ogóle jest zbędny ponieważ wartość wyrażenia  $(a-c)t$  będzie odpowiednio ujemna lub zerowa, co oznacza, że zerowa pojemność  $B$  bufora będzie spełniała nierówność (7) dla dowolnego czasu  $t$ .

2. W tym przypadku mamy do czynienia z prostokątnym przebiegiem okresowym funkcji  $r(t)$ , którego czas trwania (włączenia) nie jest podany w zadaniu więc założmy, że wynosi  $\tau_0$ , a czas przerwy (wyłączenia) wynosi  $\tau$ . W fazie  $\tau_0$  funkcja  $r(t)$  przyjmuje wartość 1 Mb/s, którą oznaczmy jako  $r_0$ , natomiast w fazie  $\tau$  przyjmuje ona wartość 0.

Na początku należy wyróżnić dwa przypadki rozwiązania:

- a) po czasie  $\tau_0 + \tau$  czyli po pełnym okresie przebiegu prostokątnego bufor nie będzie całkowicie opróżniony,
- b) po czasie  $\tau_0 + \tau$  bufor będzie całkowicie opróżniony.

W przypadku a) pozostająca w buforze po każdym okresie  $\tau_0 + \tau$  porcja danych skumuluje się po dowolnym czasie trwania transmisji do wartości nieskończonej, przepełniając tym samym dowolnie duży bufor. Należy przy tym określić dla jakich czasów  $\tau_0$  i  $\tau$  to zajdzie. Obliczmy zatem ogólną całkowitą liczbę bitów zmagazynowanych w buforze po czasie od zera do  $\tau_0 + \tau$ . Skorzystajmy w tym celu ze wzoru (2) zakładając, że przed rozpoczęciem transmisji bufor był pusty ( $\beta_0 = 0$ ) oraz odpowiednio dostosowując zmienne czasowe do danego problemu. Mamy zatem:

$$\beta(\tau_0 + \tau) = \int_0^{\tau_0 + \tau} r(t) - c(t) dt = \int_0^{\tau_0} r_0 dt + \int_{\tau_0}^{\tau} 0 dt - \int_0^{\tau_0 + \tau} c dt = r_0 \tau_0 - c(\tau_0 + \tau) \quad (8)$$

Szukamy przypadku gdy  $\beta > 0$  więc  $r_0 \tau_0 - c(\tau_0 + \tau) > 0$ . Po przekształceniu uzyskujemy nierówność:

$$\tau < \tau_0 \left( \frac{r_0}{c} - 1 \right) \quad (9)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\tau < \tau_0 \left( \frac{1 \text{ Mb/s}}{0,5 \text{ Mb/s}} - 1 \right) \Leftrightarrow \tau < \tau_0 \quad (10)$$

W przypadku b) na końcu każdego okresu przebiegu  $r(t)$  bufor będzie pusty więc istnieje możliwość, że nie nastąpi jego przepełnienie po dowolnie długim czasie transmisji. Biorąc pod uwagę wzór (10) warunkiem na to jest aby  $\tau \geq \tau_0$ .

Wyznamy zatem teraz wielkość bufora, przy której nie nastąpi jego przepełnienie. Można w tym celu skorzystać z ogólnego rozwiązania dla całego zadania danego zależnością (6), przy czym należy przyjąć, że wystarczy badać wartość maksymalną całki po jednym okresie  $\tau_0 + \tau$ , gdyż w kolejnych okresach sytuacja będzie identyczna ze względu na to, że bufor w rozważanym przypadku powraca zawsze do swojego początkowego, zerowego stanu. Zatem mamy nierówność:

$$B \geq \sup_{0 < t \leq \tau_0 + \tau} \left\{ \int_0^t r(\tau') d\tau' - ct \right\}, \quad (11)$$

gdzie  $\tau'$  jest pomocniczą zmienną podcałkową oznaczającą czas chwilowy wprowadzoną po to by nie było konfliktu oznaczeń z czasem wyłączenia transmisji  $\tau$ .

Funkcję ujętą w nawiasie klamrowym można rozpisać na dwa przypadki:

$$\int_0^t r(\tau') d\tau' - ct = \begin{cases} \int_0^t r_0 d\tau' - ct & \text{dla } 0 < t \leq \tau_0 \\ \int_0^{\tau_0} r_0 d\tau' + \int_{\tau_0}^t 0 d\tau' - ct & \text{dla } \tau_0 < t \leq \tau_0 + \tau \end{cases}, \quad (12)$$

co można uprościć do postaci:

$$\int_0^t r(\tau') d\tau' - ct = \begin{cases} (r_0 - c)t & \text{dla } 0 < t \leq \tau_0 \\ r_0 \tau_0 - ct & \text{dla } \tau_0 < t \leq \tau_0 + \tau \end{cases} \quad (13)$$

Po analizie przebiegu powyższej funkcji, którą dla uproszczenia dobrze jest wykonać w sposób graficzny widać, że ma ona w rozważanym okresie czasu wartość maksymalną równą  $(r_0 - c)\tau_0$ . Zatem nierówność (11) przyjmuje postać:

$$B \geq (r_0 - c)\tau_0, \quad (14)$$

co oznacza, że niezbędna wielkość buforu dla rozważanego przypadku wynosi:

$$B = (r_0 - c)\tau_0 = 0,5 \cdot \tau_0 \text{ [Mb]} \quad (15)$$

3. Podobnie jak w przypadku 2. mamy do czynienia z okresową funkcją  $r(t)$ . W związku z tym wszelkich obliczeń możemy dokonywać po okresie zamiast po całym czasie  $t$ . Na początku należy sprawdzić czy po pełnym pojedynczym okresie bufor będzie całkowicie opróżniony, gdyż jeśli tak będzie to wielkość bufora spełniającego warunki zadania będzie liczbą skończoną. Rozważmy funkcję wartości chwilowych bitów zmagazynowanych w buforze:

$$b(t) = r(t) - c(t) = c + c \sin \omega t - c = c \sin \omega t \quad (16)$$

Łatwo zauważyć, że całka z tej funkcji po czasie równym okresowi funkcji  $r(t)$  będzie równa zero (całka z funkcji sinus po okresie jest zawsze równa zero), więc bufor będzie całkowicie opróżniony i będzie mógł mieć skończoną wartość. Policzmy zatem tą wartość.

Korzystając z ogólnego rozwiązania danego zależnością (6) oraz z zależności (16) można zapisać, że:

$$B \geq \sup_{0 < t \leq T} \left\{ \int_0^t r(\tau) d\tau - ct \right\} = \sup_{0 < t \leq T} \left\{ \int_0^t c \sin \omega \tau d\tau \right\} \quad (17)$$

Rozwiązując wyrażenie całkowe otrzymujemy kolejne wyrażenia:

$$\begin{aligned} \int_0^t c \sin \omega \tau d\tau &= c \int_0^t \sin \omega \tau d\tau = \\ &= -\frac{c}{\omega} \cos \omega t - \left(-\frac{c}{\omega} \cos 0\right) = \frac{c}{\omega} (1 - \cos \omega t) \end{aligned} \quad (18)$$

Łatwo zauważyć, funkcja ze wzoru (18) ma wartość maksymalną dla  $\omega t = \pi$ . Zatem wartość bufora obliczamy podstawiając zależność (18) do (17) i przyjmując  $\omega t = \pi$ .

Otrzymujemy wynik ogólny:

$$B \geq \frac{c}{\omega} (1 - \cos \pi) = \frac{c}{\omega} (1 + 1) = \frac{2c}{\omega} \quad (19)$$

Po podstawieniu zadanych wartości numerycznych mamy:

$$B \geq \frac{2 \cdot 0,5 \text{ Mb/s}}{2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ kHz}} = 1,668 \text{ [b]} \quad (20)$$

Ponieważ wielkość bufora musi być liczbą całkowitą, zatem przyjmujemy, że powinna być ona równa co najmniej 2 bitom.

## ZADANIE 2

Założmy, że model węzła telekomunikacyjnego składa się z bufora o wielkość  $X$  (w bitach) i podłączonego do niego łącza o stałej przepustowości  $c$ . Założmy dalej, że przed pojawieniem się ruchu telekomunikacyjnego w tym węźle bufor jest pusty i rozpoczyna odbieranie danych wejściowych (bitów) pojawiających się z szybkością  $r(t)$  bitów na sekundę ( $t$  w funkcji  $r(t)$  oznacza czas) w chwili czasowej  $t = 0$ . Przy powyższych danych znajdź ogólny wzór określający wartości przepływności łącza  $c$ , które gwarantują, iż podczas transmisji danych nie dojdzie do przepełnienia bufora. Następnie, korzystając z wyprowadzonego wzoru ogólnego, wykonaj obliczenia dla funkcji  $r(t)$  będącej stałą, czyli dla  $r(t) = a$  (constans).

## ROZWIĄZANIE:

W ogólnym przypadku, w danym buforze w każdej chwili czasu występuje ruch telekomunikacyjny typu:  $r(t)$  bitów na sekundę wpływa do bufora i  $c(t)$  bitów na sekundę wypływa z bufora, przy czym należy założyć, że w tym ogólnym przypadku  $c(t)$  jest zmienną w czasie przepustowością łącza danych podłączonego do wyjścia bufora. Zatem w każdej chwili czasu pozostaje w buforze zmagazynowanych  $b(t) = r(t) - c(t)$  bitów na sekundę. Całkowita liczba bitów zmagazynowanych w buforze po czasie  $t$  jest sumą wszystkich chwilowych wartości  $b(t)$  od czasu 0 do  $t$ , co wygodnie jest zapisać w postaci całkowej:

$$\beta(t) = \beta_0 + \int_0^t b(\tau) d\tau, \quad (1)$$

gdzie  $\beta_0$  jest zawartością bufora przed rozpoczęciem transmisji, a  $\tau$  jest nową zmienną pomocniczą oznaczającą czas. Po odpowiednim podstawieniu wcześniej zdefiniowanych zależności otrzymujemy:

$$\beta(t) = \beta_0 + \int_0^t r(\tau) - c(\tau) d\tau \quad (2)$$

Z treści zadania wiadomo, że przed pojawieniem się ruchu telekomunikacyjnego (przed chwilą  $t = 0$ ) bufor był pusty, zatem  $\beta_0 = 0$ . Dodatkowo przepustowość  $c(t)$  jest funkcją stałą równą  $c$ . Zależność (2) można zatem uprościć do postaci:

$$\beta(t) = \int_0^t r(\tau) - c d\tau = \int_0^t r(\tau) d\tau - \int_0^t c d\tau = \int_0^t r(\tau) d\tau - ct \quad (3)$$

Wiadomo również, że całkowita liczba bitów zmagazynowanych w buforze w każdej chwili czasu nie może przekroczyć wielkości bufora  $X$ . Można to zapisać następująco:

$$\beta(t) \leq X \quad (4)$$

Po podstawieniu (3) do (4) otrzymujemy:

$$\int_0^t r(\tau) d\tau - ct \leq X \quad (5)$$

Przekształcając odpowiednio nierówność (5) można w prosty sposób otrzymać zależność określającą warunek na przepustowość  $c$  nie powodującej przepełnienia bufora:

$$\int_0^t r(\tau) d\tau - X \leq ct \Leftrightarrow c \geq \frac{\int_0^t r(\tau) d\tau - X}{t} \quad \text{dla } t \geq 0 \quad (6)$$

W drugiej części zadania należy określić ten warunek dla konkretnego przypadku gdy szybkość  $r(t)$  jest funkcją stałą równą  $r(t)=a$ . Podstawmy zatem tą funkcję do zależności (6) i uprośćmy najpierw jego prawą stronę. Kolejno otrzymujemy:

$$\frac{\int_0^t a \, d\tau - X}{t} = \frac{at - X}{t} = a - \frac{X}{t} \quad \text{dla } t \geq 0 \quad (7)$$

Wyrażenie (6) sprowadza się wtedy do postaci:

$$c \geq a - \frac{X}{t} \quad \text{dla } t \geq 0 \quad (8)$$

Oznacza to, że  $c$  musi być większe od wartości wyrażenia po prawej stronie nierówności (8) dla każdego  $t \geq 0$ . Wystarczy wtedy aby zbadać wartość maksymalną tego wyrażenia dla  $t \geq 0$ , co zapisujemy jako:

$$c \geq \sup_{t \geq 0} \left\{ a - \frac{X}{t} \right\}, \quad (9)$$

gdzie zapis  $\sup_{t \geq 0} \{ \}$  oznacza największą wartość funkcji wewnątrz nawiasu klamrowego w przedziale  $t \geq 0$ . Łatwo zauważyć, wykonując przykładowo prosty szkic, że funkcja  $-\frac{X}{t}$  w rozważanym przedziale jest rosnącą i asymptotycznie zmierza do wartości 0. Zatem całe wyrażenie w nawiasie klamrowym jest funkcją rosnącą zmierzającą asymptotycznie do wartości  $a$ . Nie trudno się domyśleć, że  $\sup_{t \geq 0} \left\{ a - \frac{X}{t} \right\} = a$ .

Ostatecznie:

$$c \geq a, \quad (10)$$

co oznacza, że aby nie doszło do przepełnienia bufora w określonych w zadaniu warunkach przepustowość  $c$  łącza podłączonego do wyjścia bufora musi być większa lub równa szybkości  $a$  wejściowego ruchu telekomunikacyjnego.

### ZADANIE 3

Splot sygnałów dyskretnych  $x[n]$  i  $h[n]$ , gdzie  $n$  należy do zbioru liczb całkowitych i oznacza  $n$ -tą dyskretną chwilę czasową, definiuje się za pomocą następującego wzoru:

$$w_n = x_n * h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} .$$

W wzorze tym indeks dolny przy  $w$ ,  $x$  oraz  $h$  odpowiada określonej przezeń chwili czasowej. Ponadto,  $x[n]$  (i odpowiednio  $h[n]$ ) – w zależności od kontekstu – oznacza zbiór elementów (próbek) tego sygnału albo wartość konkretnego,  $n$ -tego elementu (próbki sygnału w chwili czasowej  $n$ ).

Wykonaj następujące polecenia:

1. oblicz analitycznie (to znaczy bezpośrednio ze wzoru) sygnał  $w[n]$  będący splotem sygnałów  $x[n]$  i  $h[n]$ , których tylko próbki (elementy)  $x[2] = 2$ ,  $x[3] = 3$  i  $x[4] = 4$  oraz  $h[2] = 1$ ,  $h[3] = 2$  i  $h[4] = 4$  są niezerowe, a pozostałe są zerami;
2. wykreśl sygnały  $x[n]$ ,  $h[n]$  oraz  $w[n]$ ;
3. zaproponuj procedurę ułatwiającą obliczanie splotu dwóch funkcji z użyciem ich wykresów i zilustruj ją na przykładzie wyżej wymienionych sygnałów.

### ROZWIĄZANIE:

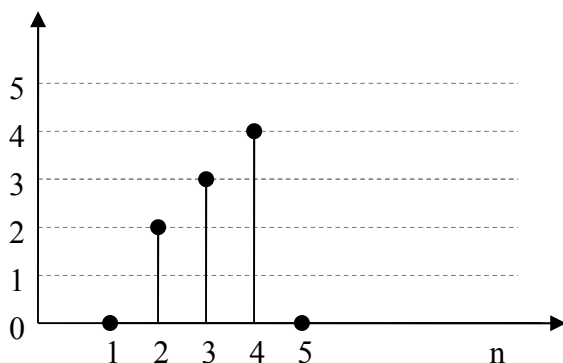
Ad. 1. Adaptując podaną definicję splotu dyskretnego do oznaczeń stosowanych w zadaniu oraz biorąc pod uwagę fakt, że sygnały  $x[n]$  i  $h[n]$  są zdefiniowane tylko dla  $n > 0$  mamy:

$$w[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=1}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

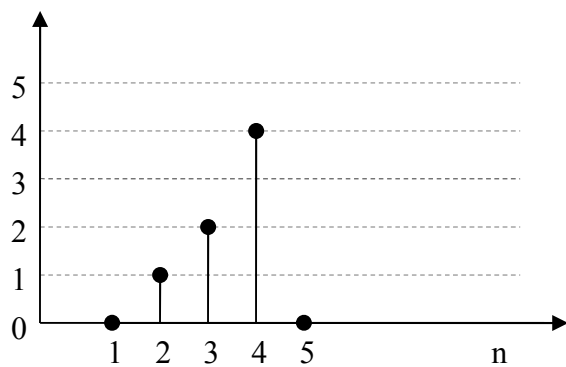
Zgodnie z powyższym wzorem należy dokonać odpowiednich obliczeń upraszczając je w ten sposób, że pomija się większość mnożeń, co do których można przewidzieć, że ich wynik będzie równy zeru. W wyniku powyższego otrzymuje się:

$$\begin{aligned} w[1] &= x[1] * h[1] = 0 \\ w[2] &= x[1] * h[2] + x[2] * h[1] = 0 \\ w[3] &= x[1] * h[3] + x[2] * h[2] + x[3] * h[1] = 0 + 2 + 0 = 2 \\ w[4] &= x[1] * h[4] + x[2] * h[3] + x[3] * h[2] + x[4] * h[1] = 0 + 4 + 3 + 0 = 7 \\ w[5] &= x[1] * h[5] + x[2] * h[4] + x[3] * h[3] + x[4] * h[2] + x[5] * h[1] = 0 + 8 + 6 + 4 + 0 = 18 \\ w[6] &= x[2] * h[5] + x[3] * h[4] + x[4] * h[3] + x[5] * h[2] = 0 + 12 + 8 + 0 = 20 \\ w[7] &= x[3] * h[5] + x[4] * h[4] + x[5] * h[3] = 0 + 16 + 0 = 16 \\ w[8] &= x[4] * h[5] + x[5] * h[4] = 0 + 0 = 0 \\ w[9] &= x[5] * h[5] = 0 \end{aligned}$$

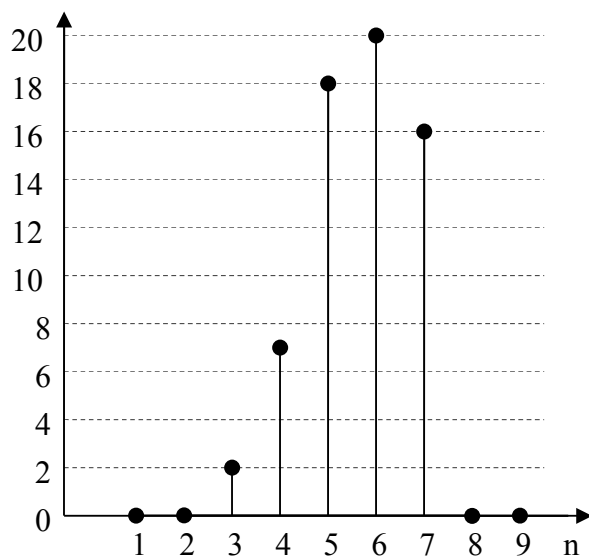
Ad. 2. Sygnał  $x[n]$  jest postaci:



Sygnał  $h[n]$  jest postaci:

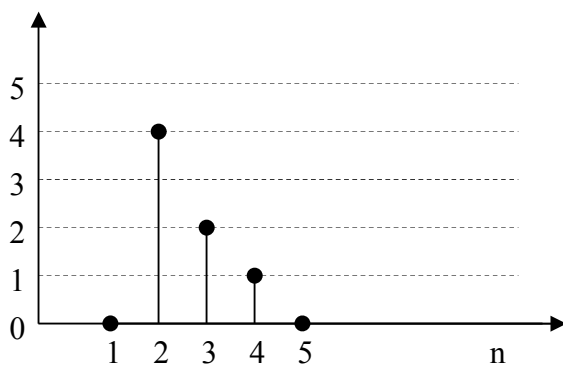


Sygnał  $w[n]$  ma postać:

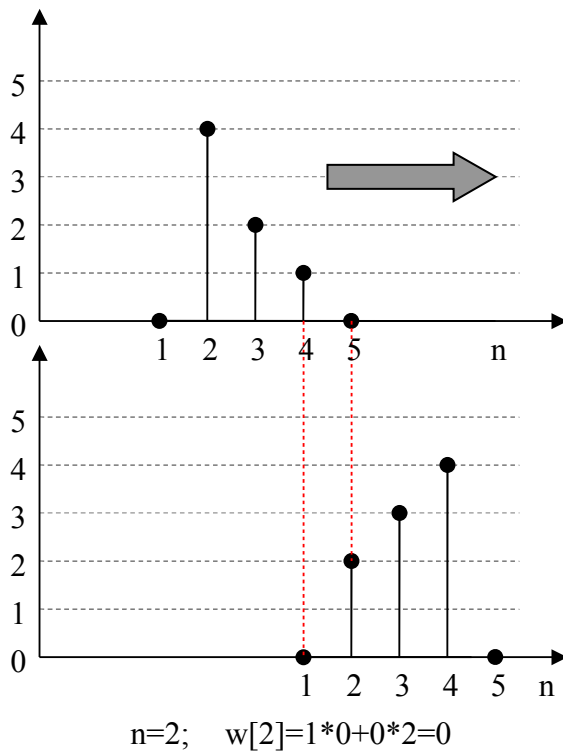
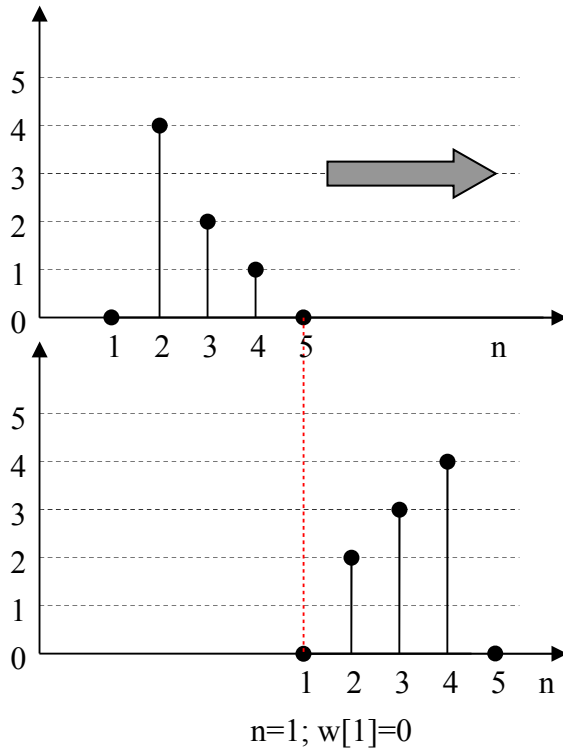


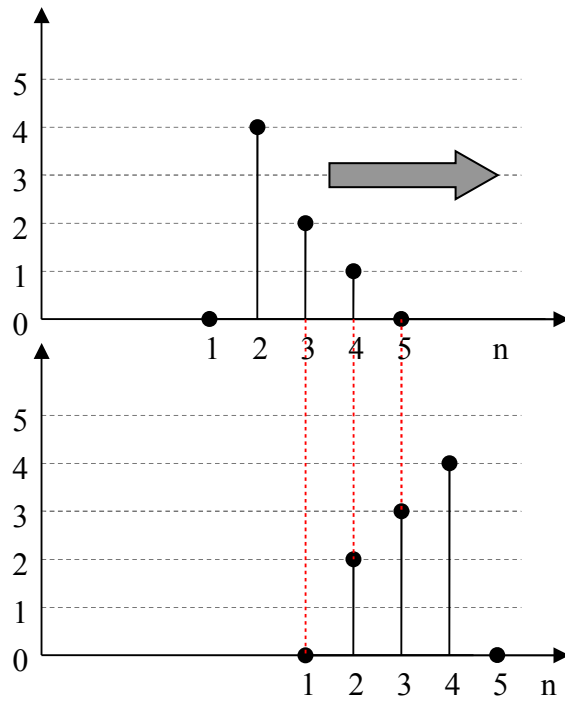
Ad.3. W celu uzyskania rozwiązania graficznego wektora  $w[n]$  będącego splotem dwóch sygnałów  $x[n]$  i  $h[n]$  należy:

1. Wykreślić wektor  $h[-n]$  jak to zrobiono poniżej.



2. Przesuwać wektor  $h[-n]$  w prawo dokonując mnożeń wszystkich współczynników odpowiadających sobie jak to zaznaczono dla pierwszych trzech kroków.





$n=3; \quad w[3]=0+2+0=2$

## ZADANIE 4

Komputer A stara się wysłać do komputera B jeden bajt (8 bitów) danych według następującego protokołu:

1. Komputer A wysyła do komputera B jeden bajt danych.
2. Komputer B odsyła do komputera A bajt, który odebrał.
3. Jeżeli bajt odebrany przez komputer A różni się od tego, który wysłał, przechodzi do punktu 1, w przeciwnym przypadku uznaje transmisję za zakończoną.

Komputer B za poprawnie odebraną daną (bajt) uznaje daną odebraną w ostatnim cyklu powyższego protokołu.

Przyjmij, że informacja o tym, że dana (bajt) została wysłana, jest przekazywana w sposób niezawodny. Dalej, przyjmij, że błędy, jeżeli występują, to pojawiają się na poszczególnych bitach bajtu w sposób niezależny od siebie, a prawdopodobieństwo ich wystąpienia (to jest zmiany wartości bitu na przeciwną) przy przesyłaniu wiadomości od A do B wynosi  $p_{AB}=0,01$ , zaś w kierunku odwrotnym, od B do A,  $p_{BA}=0,005$ . Oblicz prawdopodobieństwo, że dana odebrana przez komputer B po zakończeniu powyżej opisanej procedury jest niepoprawna.

## ROZWIĄZANIE:

W pojedynczym cyklu protokołu mogą wystąpić następujące sytuacje:

1. Dana została poprawnie odebrana przez komputer B oraz odesłana dana została poprawnie odebrana przez komputer A. Cała procedura została zakończona, a dana odebrana przez B jest poprawna.
2. Dana została niepoprawnie odebrana przez komputer B oraz błędy na tych samych bitach wystąpiły przy transmisji w drugą stronę. Cała procedura została zakończona, a dana odebrana przez B jest niepoprawna.
3. W pozostałych przypadkach cykl zostanie powtórzony.

Prawdopodobieństwo sytuacji 1. wynosi  $p_G = (1 - p_{AB})^8 (1 - p_{BA})^8 = 0,8865$ .

Wynika to z tego, że taka sytuacja może nastąpić wtedy gdy równocześnie zajdą wszystkie zdarzenia poprawnej transmisji: 8 zdarzeń poprawnej transmisji 8-miu bitów z komputera A do B i 8 zdarzeń poprawnej transmisji 8-miu bitów z komputera B do A. Prawdopodobieństwo to liczy się więc jako prawdopodobieństwo iloczynu wszystkich zdarzeń. Prawdopodobieństwo zdarzenia poprawnej transmisji z A do B jest równe  $1 - p_{AB}$ , natomiast prawdopodobieństwo zdarzenia poprawnej transmisji z B do A jest równe  $1 - p_{BA}$ . Wykładniki równe 8 oznaczają 8 iloczynów identycznych prawdopodobieństw związanych z przesyłem każdego bitu.

Prawdopodobieństwo sytuacji 2. wynosi  $p_E = \sum_{i=1}^8 \binom{8}{i} p_{AB}^i (1 - p_{AB})^{8-i} p_{BA}^i (1 - p_{BA})^{8-i} = 0,000360$ .

Jest to inaczej prawdopodobieństwo sumy 8-miu alternatywnych zdarzeń. Każde z tych zdarzeń polega na przekłamaniu odpowiednio jednego, dwóch, trzech, ... lub ośmiu bitów jednocześnie przy transmisji z komputera A do B i z komputera B do A, przy czym

przekłamanie w obydwu kierunkach transmisji jest na tych samych pozycjach bitów. Dla uproszczenia opisu takie zdarzenie będzie dalej oznaczane literą  $I$ . Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $I$  jest opisane jako:

$$p_I = p_{AB}^i (1 - p_{AB})^{8-i} p_{BA}^i (1 - p_{BA})^{8-i} ,$$

gdzie  $i$  oznacza liczbę przekłamanych bitów. Jak widać jest to prawdopodobieństwo iloczynu następujących zdarzeń: przekłamania transmisji z komputera A do B na  $i$ -bitach, poprawnej transmisji z komputera A do B na pozostałej liczbie bitów, przekłamania transmisji z komputera B do A na tylu samych  $i$ -bitach i poprawnej transmisji z komputera B do A na pozostałej liczbie bitów.

Symbol Newtona  $\binom{8}{i}$  określa liczbę różnych kombinacji zajścia zdarzenia  $I$ . Przykładowo, jeśli jest przekłamanie na jednym i tym samym bicie w obu kierunkach to jest osiem takich kombinacji: przekłamanie na 1-szym bicie, na 2-gim bicie, ... i na 8-mym bicie. Jeśli jest przekłamanie na dwóch tych samych bitach w obu kierunkach to jest takich kombinacji 28: przekłamanie na 1-szym i 2-gim bicie, przekłamanie na 1-szym i 3-cim bicie, itd.

Ponieważ każda dodatkowa kombinacja stanowi nową alternatywę zajścia zdarzenia  $I$  więc zwiększa ona liczone prawdopodobieństwo  $p_E$ . Stąd też liczba kombinacji występuje we wzorze jako całkowity mnożnik prawdopodobieństwa  $p_I$ .

Prawdopodobieństwo sytuacji 3. wynosi  $p_R = 1 - p_G - p_E = 0,1131$ .

Wynika to z tego, że jest to prawdopodobieństwo zajścia wszystkich innych sytuacji niż sytuacja 1. i 2. Prawdopodobieństwo tego typu zdarzeń oblicza się jako dopełnienie sumy wszystkich pozostałych prawdopodobieństw do liczby 1 czyli w naszym przypadku prawdopodobieństw sytuacji 1. i 2.

Prawdopodobieństwo odbioru błędnej danej przez komputer B po zakończeniu algorytmu jest sumą prawdopodobieństw wszystkich możliwych scenariuszów zdarzeń typu:

- wystąpiła tylko sytuacja 2.,
- wystąpiła sytuacja 3. i w powtórnej transmisji wystąpiła sytuacja 2.,
- wystąpiła sytuacja 3., później znowu sytuacja 3. i na końcu wystąpiła sytuacja 2.,
- wystąpiła sytuacja 3., znowu 3., znowu 3. i na końcu 2.,
- itd.

Można opisać je zatem następująco:

$$p_W = p_E + p_R p_E + p_R^2 p_E + p_R^3 p_E + \dots$$

Łatwo zauważyć, że jest to nieskończony szereg geometryczny. Jest on zbieżny ponieważ wartość bezwzględna jego ilorazu  $p_R$  jest mniejsza od 1. Skoro jest to szereg zbieżny to znaczy, że ma skończoną sumę swoich składników.

Suma tego szeregu jest rozwiązaniem zadania i jest równa:

$$p_W = p_E + p_R p_E + p_R^2 p_E + p_R^3 p_E + \dots = \frac{p_E}{1 - p_R} = 0,0004059 .$$

## **ZADANIE 5**

Prostym algorytmem kompresji danych jest algorytm kodowania długości ciągu. W jednej z jego wersji dane wejściowe traktuje się jako strumień bajtów. Jedną z wartości bajtu, najlepiej najrzadziej występującą w ciągu wejściowym, np. 137, traktuje się w ciągu wyjściowym jako znacznik. Ciągi jednakowych bajtów w strumieniu wejściowym o długości większej niż 3, a mniejszej niż 255 koduje się za pomocą sekwencji trzech bajtów [znacznik, powtarzany bajt, liczba powtórzeń]. Jeżeli liczba powtórzeń przekracza 255, w ciągu wyjściowym może wystąpić kolejno kilka takich sekwencji. Ponadto, jeżeli w ciągu wejściowym występuje znacznik, jego jednokrotne lub wielokrotne wystąpienie koduje się za pomocą tej samej sekwencji.

Przykład:

Ciąg wejściowy

1 2 3 3 3 3 3 3 4 5 6 137 4 5 6 8 8 8 8 137 137

będzie zakodowany jako:

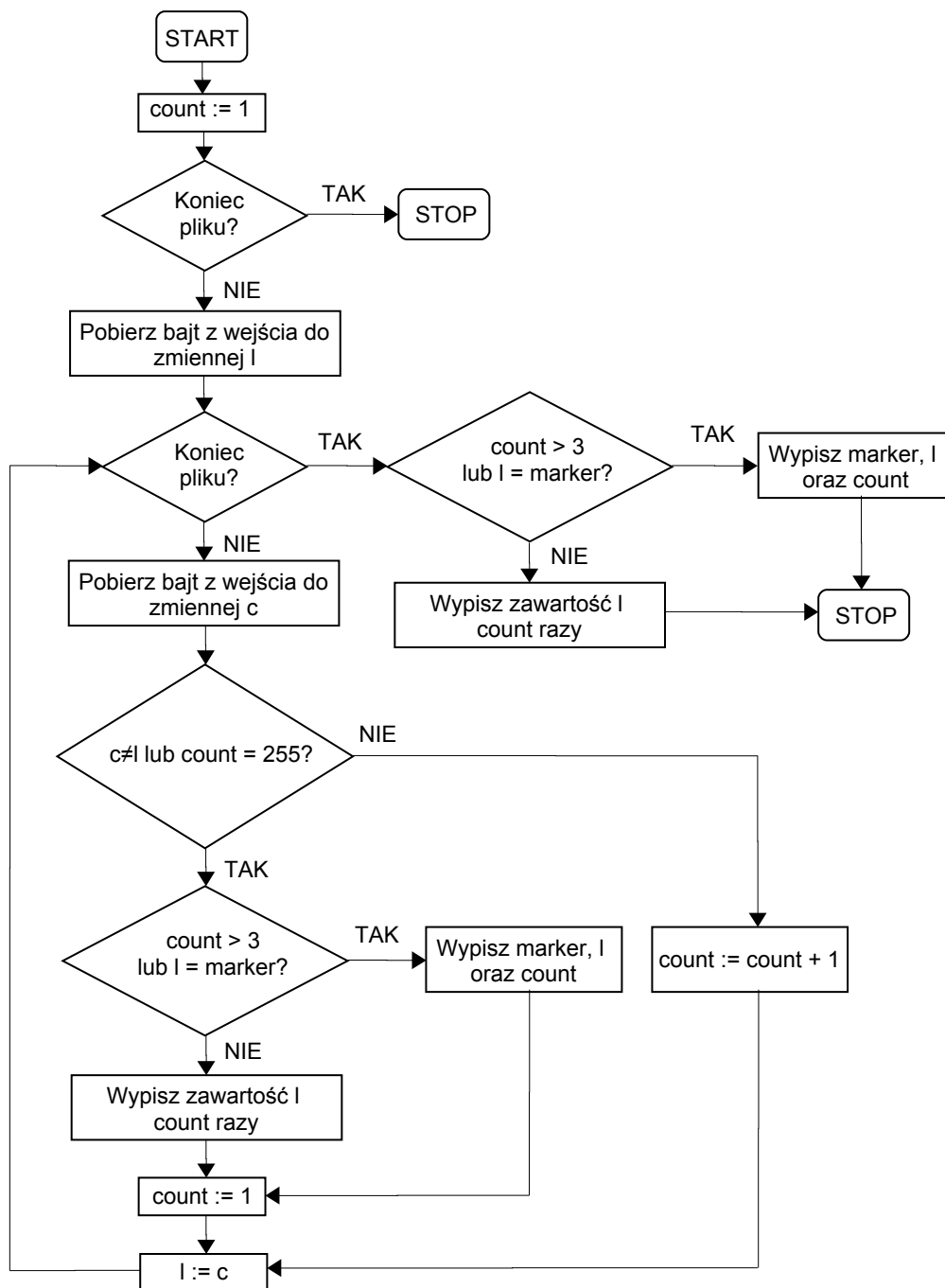
1 2 137 3 6 4 5 6 137 137 1 4 5 6 137 8 4 137 137 2 .

Narysować schematy blokowe programów: kompresującego i dekompresującego dane według powyżej opisanej metody, zakładając że istnieją (to znaczy są do dyspozycji) następujące operacje: pobrania bajtu z wejścia i wypisania bajtu na wyjściu.

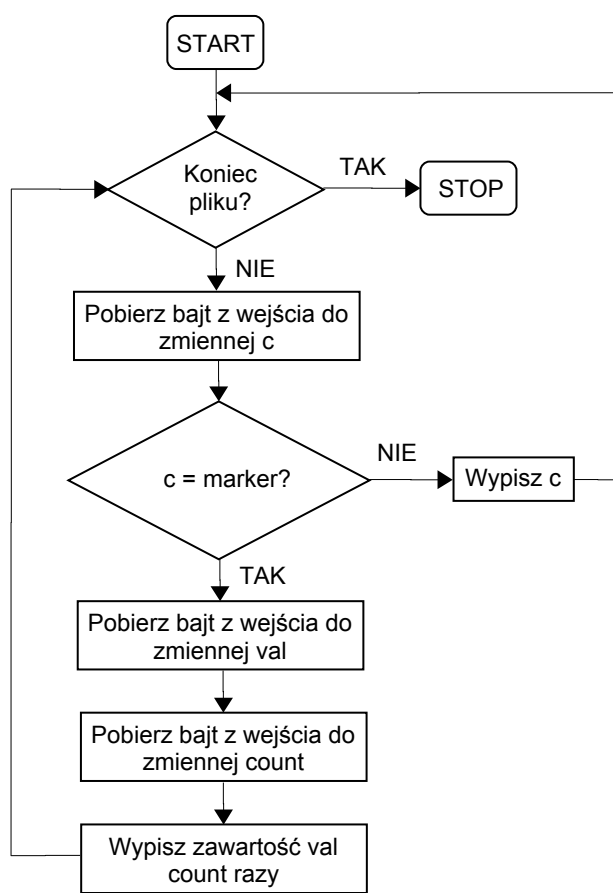
## **ROZWIĄZANIE:**

Przykładowe schematy blokowe:

## Algorytm kompresji



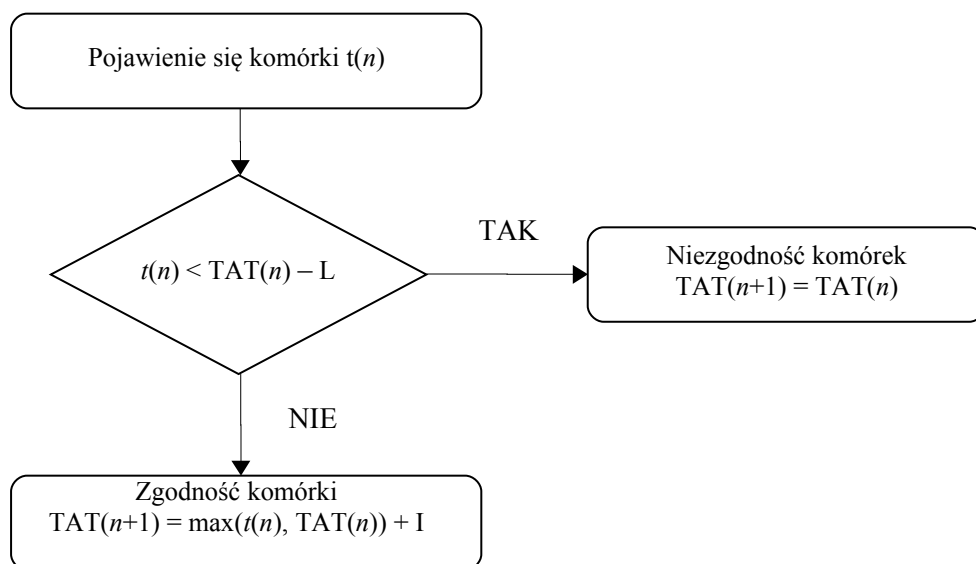
## Algorytm dekompresji



## ZADANIE 6

Algorytm GCRA (skrót pochodzi od angielskich słów: Generic Cell Rate Algorithm) to jeden z bardzo ważnych algorytmów sterowania ruchem telekomunikacyjnym w cyfrowych sieciach teleinformatycznych. Załóżmy, że został on zaimplementowany w jakimś urządzeniu, na którego wejście podaje się strumień danych w postaci pakietów, w tym przypadku nazywanych komórkami. Komórki występują w strumieniu jedna po drugiej, ale niekoniecznie w tych samych odstępach czasowych. W algorytmie GCRA porównuje się czas pojawienia się danej komórki z pewnym hipotetycznym czasem - obliczanym na bieżąco - według reguły zapisanej na rysunku 6.1. Na tej podstawie algorytm określa, czy dana komórka jest zgodna, czy niezgodna (z regułą uwidocznioną na rys. 6.1) i ta informacja pojawia się na wyjściu urządzenia.

W algorytmie GCRA trzeba określić dwa parametry,  $I$  i  $L$ ; występują one na schemacie z rys. 6.1. Algorytm GCRA z konkretnymi wartościami parametrów  $I$  i  $L$  oznacza się GCRA( $I, L$ ). Ponadto,  $t(n)$  na rys. 6.1 oznacza czas pojawienia się w strumieniu  $n$ -tej komórki, a  $TAT(n)$  jest pomocniczą zmienną czasową, obliczaną na bieżąco (dla  $n$ -tej komórki).



Rys. 6.1. Schemat objaśniający algorytm GCRA

Weźmy pod uwagę algorytm GCRA(10, 2). Dla tego algorytmu należy określić, które komórki będzie on uważał za zgodne, a które za niezgodne w przypadku dwóch poniższych strumieni danych (komórek), które pojawiają się w podanych poniżej chwilach czasowych (czas jest tu liczony w jednostkach znormalizowanych):

- a. 0, 10, 18, 28, 38
- b. 0, 10, 15, 25, 35

**ROZWIĄZANIE:**

Korzystając z algorytmu przedstawionego w treści zadania możemy wyznaczyć wszystkie przypadki pracy algorytmu (dla każdej chwili czasowej). Kolejno, dla obu przepływów uzyskujemy takie oto wyniki:

a. 0, 10, 18, 28, 38

Jednostka czasu $n$	1	2	3	4	5
$t(n)$	0	10	18	28	38
$TAT(n) - L$	$0 - 2$	$10 - 2$	$20 - 2$	$30 - 2$	$40 - 2$
$TAT(n+1)$	10	20	30	40	50
Zgodność komórek	TAK	TAK	TAK	TAK	TAK

b. 0, 10, 15, 25, 35

Jednostka czasu $n$	1	2	3	4	5
$t(n)$	0	10	15	25	35
$TAT(n) - L$	$0 - 2$	$10 - 2$	$20 - 2$	$20 - 2$	$35 - 2$
$TAT(n+1)$	10	20	20	35	45
Zgodność komórek	TAK	TAK	NIE	TAK	TAK